

خلاصه گزاره:

گزاره: جمله خبری، درست یا نادرست ← بدون متغیر
 گزاره من: جمله خبری با متغیر ←
 } دانسته متغیر: D
 } مجهول مجهول: S

ترکیب گزاره‌ها ← $p \vee q$ ، $p \wedge q$ ، $p \Rightarrow q$ ، $p \Leftrightarrow q$
 جدول ارزش گزاره‌ها ← تعداد سطرها = 2^n
 (دالط گزاره‌ها) (حمبر گزاره‌ها)

1) $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

2) $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$

3) جذب: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ ، $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

4) سورگان: $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ ، $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

{	$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	$p \Rightarrow p \equiv T$	$p \Leftrightarrow p \equiv T$ (5)
	$p \vee \sim p \equiv T$	$p \wedge \sim p \equiv F$	$\begin{cases} p \Rightarrow \sim p \equiv \sim p \\ \sim p \Rightarrow p \equiv p \end{cases}$	$\sim p \Leftrightarrow p \equiv F$
	$p \vee T \equiv T$	$p \wedge T \equiv p$	$\begin{cases} p \Rightarrow T \equiv T \\ T \Rightarrow p \equiv p \end{cases}$	$p \Leftrightarrow T \equiv p$
	$p \vee F \equiv p$	$p \wedge F \equiv F$	$\begin{cases} p \Rightarrow F \equiv \sim p \\ F \Rightarrow p \equiv T \end{cases}$	$p \Leftrightarrow F \equiv \sim p$

سورها
 سور عمومی: \forall به ازای هر
 سور وجودی: \exists به ازای حداقل یک
 سور منفر: \nexists به ازای هیچ فرد

نقض: $\begin{cases} \sim(\forall x: p(x)) \equiv \exists x: \sim p(x) \\ \sim(\exists x: p(x)) \equiv \forall x: \sim p(x) \end{cases}$



خلاصه مجموعه:

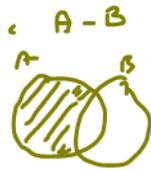
عدهت معنویت \subseteq زیر مجرم

تعداد اعضا یک مجرم = عدد اصلی مجرم = $n(A) = |A|$ ← تعداد مجازیت

$\{a, a, a, b\} = \{a, b\} \rightarrow |A| = 2$

اگر مجرم n معنوی داشته باشیم } تعداد زیر مجرمها k معنوی = (n)
 تعداد کل زیر مجرمها = 2^n

تفاوت سازگ



رابطه مجرمها:

ادابطه مجرمها (حبر مجرمها)

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$A - B = A \cap B'$

(1)

تفاوت A و B فقط B $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

(2)

$A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$

(3) خوب

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

(4) درستی

{	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap A = A$	$A - A = \emptyset$	$A \Delta A = \emptyset$	(5)
	$A \cup A' = U$	$A \cap A' = \emptyset$	$\begin{cases} A - A' = A \\ A' - A = A' \end{cases}$	$A \Delta A' = U$	
	$A \cup U = U$	$A \cap U = A$	$\begin{cases} A - U = \emptyset \\ U - A = A' \end{cases}$	$A \Delta U = A'$	
	$A \cup \emptyset = A$	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$\begin{cases} A - \emptyset = A \\ \emptyset - A = \emptyset \end{cases}$	$A \Delta \emptyset = A$	

مجموع زیر مجرمها $A \times B =$ $\xrightarrow{\text{کلمه}}$
 ضرب دکارتی $\left\{ \begin{array}{l} A \times B = \\ \text{مجموعه} \end{array} \right.$ $\xrightarrow{\text{شکل}}$





خلاصه آمار:

ساعات شروع: ۷:۳۰ صبح	ریاضی و فیزیک	رشته:	تعداد صفحه: ۳	آمار و احتمال	سوالات آزمون نهایی درس:																									
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	نام و نام خانوادگی:	۱۴۰۳/۰۴/۰۴	تاریخ آزمون:	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه																										
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایتارگر داخل و خارج کشور خرداد ۱۴۰۳																												
ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد)				نمره																									
۱	<p>درست یا نادرست بودن هر یک از عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، آن گاه $A \times \emptyset = \emptyset$.</p> <p>ب) اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از یک فضای نمونه‌ای باشند، آن گاه A و B مستقل از یکدیگرند.</p> <p>پ) اگر تمام داده‌ها را در عدد ۳ ضرب کنیم، ضریب تغییرات داده‌ها ۳ برابر می‌شود.</p>				۰.۷۵																									
۲	<p>هر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) اگر p یک گزاره دلخواه و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آن گاه:</p> $p \vee F \equiv \dots\dots$ <p>ب) اگر داده‌های ۱۰، ۸، ۱۰، x، ۱۲، ۱۲ مد نداشته باشند، آن گاه x برابر است.</p> <p>پ) اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند، می‌گویند آن روش نمونه‌گیری است. (اریب - ناریب)</p>				۰.۷۵																									
۳	<p>با وارد کردن جدول زیر در پاسخبرگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$.</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>p</td> <td>q</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>د</td> <td>د</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>د</td> <td>ن</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>ن</td> <td>د</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>ن</td> <td>ن</td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </table>				p	q				د	د				د	ن				ن	د				ن	ن				۱
p	q																													
د	د																													
د	ن																													
ن	د																													
ن	ن																													
۴	<p>گزاره زیر را با استفاده از نماد سورها (\exists یا \forall) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید.</p> <p>"هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچک‌تر است."</p>				۱																									
۵	<p>اگر A, B, C, D چهار مجموعه با مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$، آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.</p>				۱																									
۶	<p>اگر A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت $(A - B) \cup (A \cap B)$ را تا حد امکان ساده کنید.</p>				۱																									
۷	<p>اگر $A = \{-1, 2\}$ و $B = \mathbb{R}$، نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.</p>				۰.۵																									

سؤالات آزمون نهایی درس: آمار و احتمال		تعداد صفحه: ۳	رشته: ریاضی و فیزیک	ساعت شروع: ۷:۳۰ صبح												
پایه یازدهم دوره دوم متوسطه		تاریخ آزمون: ۱۴۰۳/۰۴/۰۴	نام و نام خانوادگی:	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه												
دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایثارگر داخل و خارج کشور خرداد ۱۴۰۳																
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir																
ردیف	سؤالات (پاسخ نامه دارد)															
۸	عددی به تصادف از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال آن که عدد انتخابی بر ۳ بخش پذیر باشد ولی بر ۴ بخش پذیر نباشد، را محاسبه کنید.															
۹	یک تاس به گونه‌ای ساخته شده است که احتمال وقوع هر عدد اول، چهار برابر احتمال وقوع هر عدد غیر اول است. در پرتاب این تاس، احتمال این که عدد زوج مشاهده شود را به دست آورید.															
۱۰	فرض کنید A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند به طوری که $P(B) \neq 0$ ، ثابت کنید: $P(A' B) = 1 - P(A B)$															
۱۱	دروازه‌بان یک تیم فوتبال، اگر روحیه خوبی داشته باشد، با احتمال ۶۰ درصد و اگر روحیه بدی داشته باشد، با احتمال ۳۰ درصد ضربه پنالتی را مهار می‌کند. پیش از اولین ضربه پنالتی، روحیه این دروازه‌بان خوب است. احتمال آن را به دست آورید که این دروازه‌بان در سه ضربه پنالتی اول، دوم و سوم، دقیقاً دو ضربه آخر را مهار کند. (با مهار هر پنالتی، روحیه دروازه‌بان خوب و در غیر این صورت بد می‌شود).															
۱۲	در مدرسه‌ای ۶۰ درصد دانش آموزان در رشته تجربی و ۴۰ درصد دانش آموزان در رشته ریاضی تحصیل می‌کنند. در این مدرسه، $\frac{1}{3}$ دانش آموزان رشته تجربی و $\frac{1}{4}$ دانش آموزان رشته ریاضی، معدل بالای ۱۸ کسب کرده‌اند. دانش آموزی به تصادف از این مدرسه انتخاب شده و معدل او بالای ۱۸ است. احتمال آن که این فرد، دانش آموز رشته تجربی باشد را به دست آورید.															
۱۳	در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهده عدد ۵ در تاس اول و B پیشامد مجموع ۹ در برآمدهای دو تاس باشد. مستقل بودن یا نبودن پیشامدهای A و B را بررسی کنید.															
۱۴	جدول فراوانی زیر مربوط به قد دانش آموزان یک کلاس برحسب سانتی متر است. الف) مقادیر عددی a و b را در جدول پیدا کنید. ب) نمودار بافت نگاشت <u>فراوانی</u> قد دانش آموزان را رسم کنید.															
۱۰۲۵	<table border="1"> <thead> <tr> <th>قد دانش آموزان</th> <th>فراوانی</th> <th>فراوانی نسبی</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$120 \leq H < 140$</td> <td>۶</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> </tr> <tr> <td>$140 \leq H < 160$</td> <td>۱۰</td> <td>a</td> </tr> <tr> <td>$160 \leq H < 180$</td> <td>۴</td> <td>b</td> </tr> </tbody> </table>				قد دانش آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی	$120 \leq H < 140$	۶	$\frac{1}{3}$	$140 \leq H < 160$	۱۰	a	$160 \leq H < 180$	۴	b
قد دانش آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی														
$120 \leq H < 140$	۶	$\frac{1}{3}$														
$140 \leq H < 160$	۱۰	a														
$160 \leq H < 180$	۴	b														

ساعات شروع: ۷:۳۰ صبح	ریاضی و فیزیک	رشته:	تعداد صفحه: ۳	آمار و احتمال	سوالات آزمون نهایی درس:												
مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	نام و نام خانوادگی:	۱۴۰۳/۰۴/۰۴		تاریخ آزمون:	پایه یازدهم دوره دوم متوسطه												
مرکز ارزشیابی و تضمین کیفیت نظام آموزش و پرورش azmoon.medu.ir		دانش آموزان روزانه، بزرگسال، داوطلب آزاد، آموزش از راه دور و ایتارگر داخل و خارج کشور خرداد ۱۴۰۳															
ردیف	سوالات (پاسخ نامه دارد)				نمره												
۱۵	<p>حسین در یک آزمون شرکت کرده و کارنامه آزمون او به شرح زیر است. اگر معدل موزون (میانگین وزن دار) نمره‌های این آزمون حسین، ۷۰ باشد، نمره فیزیک او را محاسبه نمایید.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th>مواد امتحانی</th> <th>ریاضیات</th> <th>فیزیک</th> <th>شیمی</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>نمره</td> <td>۶۵</td> <td>۴</td> <td>۹۵</td> </tr> <tr> <td>ضریب درس</td> <td>۴</td> <td>۳</td> <td>۲</td> </tr> </tbody> </table>				مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	نمره	۶۵	۴	۹۵	ضریب درس	۴	۳	۲	۱۲۵
مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی														
نمره	۶۵	۴	۹۵														
ضریب درس	۴	۳	۲														
۱۶	<p>انحراف معیار داده‌های زیر را به دست آورید. (مراحل محاسبه انحراف معیار را به شکل کامل بنویسید).</p> <p>۱۶, ۸, ۱۰, ۱۲, ۱۴</p>				۱۰۲۵												
۱۷	<p>چارک اول، میانه و چارک سوم داده‌های زیر را بیابید.</p> <p>۲, ۵, ۷, ۳, ۹, ۴, ۱, ۶, ۶, ۷</p>				۰۰۷۵												
۱۸	<p>در هر مورد مناسب‌ترین روش نمونه‌گیری را بنویسید.</p> <p>الف) می‌خواهیم میانگین نمره‌های ریاضی دانش‌آموزان یک شهر را محاسبه کنیم. فهرست همه دانش‌آموزان را نداریم اما فهرست مدارس موجود است.</p> <p>ب) مدیر یک مدرسه می‌خواهد نظرات دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه بداند. مدرسه ۶ پایه دارد و حدس می‌زنیم که نظر ۶ پایه با هم متفاوت است.</p>				۰۰۵												
۱۹	<p>در یک دانشگاه، میانگین سن یک نمونه تصادفی ۲۵ نفره از دانشجویان برابر ۲۲ سال است. اگر در بررسی‌های گذشته، انحراف معیار سن دانشجویان این دانشگاه برابر ۲ سال باشد، بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سن جامعه دانشجویان این دانشگاه را محاسبه کنید.</p>				۱												
۲۰	<p>داده‌های مربوط به مطالعه یک جامعه ۷ عضوی به صورت زیر است:</p> <p>۳, ۱, ۴, ۰, ۲, ۶, ۵</p> <p>الف) تمام نمونه‌های دو عضوی از جامعه را بنویسید که میانگین آن‌ها ۳ باشد.</p> <p>ب) احتمال آن‌که یک نمونه دو عضوی که به تصادف انتخاب شده است، دارای میانگین ۳ باشد، را به دست آورید.</p>				۱۰۲۵												

هر جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
 الف) اگر p یک گزاره دلخواه و F یک گزاره همواره نادرست باشد، آن گاه:
 $p \vee F \equiv \dots$

با وارد کردن جدول زیر در پاسخبرگ و سپس تکمیل آن، نشان دهید که: $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

گزاره زیر را با استفاده از نماد سورها (\exists یا \forall) بنویسید و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید.
 "هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچکتر است."

$\forall a \in \mathbb{N} : a < a^2$

ارزش گزاره S = ثابت / مثال نقض

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

$1 < 1^2$
 $2 < 2^2$
 $3 < 3^2$
 \vdots

مثلاً $2, 25 \leftarrow$ (مثلاً)

۱	<p>۵ اگر A, B, C, D چهار مجموعه با مرجع U باشند، به روش عضوگیری دلخواه ثابت کنید اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$، آن گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.</p>
---	--

اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x; [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow \dots \text{ن} \in B & (A \subseteq B \text{ زیرا}) \\ \vee & \vee \\ \text{ن} \in C \Rightarrow x \in D & (C \subseteq D \text{ زیرا}) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow \dots \text{ن} \in B \cup D$$

بنابراین داریم:

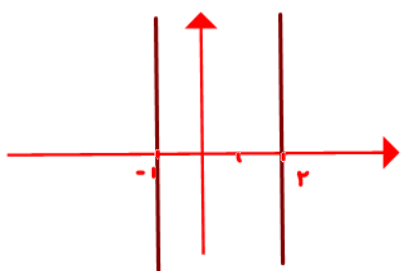
$$\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow \dots A \cup C \subseteq B \cup D$$

۱	<p>۶ اگر A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت $(A - B) \cup (A \cap B)$ را تا حد امکان ساده کنید.</p>
---	---

$$(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A \cap U = A$$

الف) اگر A یک مجموعه دلخواه باشد، آن گاه $A \times \emptyset = \emptyset$. **درست**

۰.۵	<p>۷ اگر $A = \{-1, 2\}$ و $B = \mathbb{R}$، نمودار حاصل ضرب دکارتی $A \times B$ را در دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.</p>
-----	---



بارم محورها = $2,75$ متر

$$\text{مضرب} = 2,75 + 2,75 = 5,5$$

تمرینات لم فض اولک - ص ۱۵

۵ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

$\neg p \wedge p$ (ب)	$p \wedge \neg q$ (الف)
$(p \vee q) \wedge \neg p$ (ت)	$\neg p \vee p$ (پ)
$\neg p \Leftrightarrow \neg q$ (ج)	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$ (ث)

۶ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که:

$p \vee \neg p \equiv T$ (ب)	$p \Rightarrow p \equiv T$ (الف)
$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ (ت)	$p \wedge T \equiv p$ (پ)
$p \vee (q \wedge p) \equiv p$ (ج)	$p \wedge (q \vee p) \equiv p$ (ث)
$\neg(p \Leftrightarrow q) \equiv \neg p \Leftrightarrow q$ (ح)	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$ (ج)

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$
د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	ن	د	ن
د	ن	د	د	د	ن	د
د	ن	ن	د	د	ن	د
ن	د	د	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	ن	د	د	ن	د

۷ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۱۰ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نفیض هر یک را بنویسید.

$\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$ (ب)	$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$ (الف)
$\exists y \in \mathbb{R}; \frac{y - 3}{5} = 0$ (ت)	$\forall x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$ (پ)

ویژگی ۱- فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به طوری که $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ثابت کنید $A \subseteq C$.

اثبات: برای اثبات $A \subseteq C$ ، باید ثابت کنیم که: $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C)$
برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x; x \in A \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \in B \stackrel{B \subseteq C}{\Rightarrow} x \in C$$

در نتیجه داریم:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in C) \Rightarrow A \subseteq C$$

ویژگی ۲- فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \subseteq B$. ثابت کنید $B' \subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

اثبات: برای اینکه ثابت کنیم $B' \subseteq A'$ باید نشان دهیم که: $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A')$ بنابراین داریم:

$$\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \notin B \stackrel{A \subseteq B}{\Rightarrow} x \notin A \Rightarrow x \in A')$$

در نتیجه داریم: $\forall x; (x \in B' \Rightarrow x \in A') \Rightarrow B' \subseteq A'$

ویژگی ۳- برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید: $\emptyset \subseteq A$.
اثبات: برای اثبات $\emptyset \subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x; (x \in \emptyset \Rightarrow x \in A)$ همواره درست است. چون در این گزاره شرطی، ارزش مقدم یعنی $x \in \emptyset$ نادرست است، پس به انتهای مقدم ارزش گزاره شرطی درست است و در نتیجه $\emptyset \subseteq A$.

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A \subseteq A \cup B$.
اثبات:

$$\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \vee x \in B) \Rightarrow x \in A \cup B$$

بنابراین داریم: $\forall x; (x \in A \Rightarrow x \in A \cup B) \Rightarrow A \subseteq A \cup B$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

۲ فرض کنید A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن‌گاه $A \cup C \subseteq B \cup D$.
اثبات: جاهای خالی را پر کنید:

$$\forall x; [x \in (A \cup C)] \Rightarrow \begin{cases} x \in A \Rightarrow \dots \wedge \in B & (A \subseteq B \text{ زیرا}) \\ \vee & \vee \\ \dots \wedge \in C \Rightarrow x \in D & (C \subseteq D \text{ زیرا}) \end{cases} \Rightarrow x \in B \vee x \in D \Rightarrow \dots \wedge \in B \cup D$$

بنابراین داریم:

$$\forall x; [x \in (A \cup C) \Rightarrow x \in (B \cup D)] \Rightarrow \dots A \cup C \subseteq B \cup D$$

مثال: فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: $A \cap B = B \cap A$ (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).
اثبات: برای اثبات حکم باید درستی دو رابطه زیر را نشان دهیم:

$$A \cap B \subseteq B \cap A \quad (1) \quad ; \quad B \cap A \subseteq A \cap B \quad (2)$$

اثبات (1):

$$\forall x; [x \in (A \cap B) \Rightarrow x \in A \wedge x \in B \Rightarrow x \in B \wedge x \in A \quad (\wedge \text{ طبق خاصیت جابه‌جایی}) \\ \Rightarrow x \in B \cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطه (2) را نشان داد.

مثال: فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A \subseteq B$ آن‌گاه $A - B = \emptyset$.
اثبات:

$$A - B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \notin B\} \subseteq \{x \in U \mid x \in B \wedge x \notin B\} = \emptyset \quad (A \subseteq B \text{ زیرا}) \\ \Rightarrow A - B \subseteq \emptyset$$

و از آنجا که می‌دانیم $\emptyset \subseteq A - B$ ، در نتیجه $A - B = \emptyset$.

۱ ثابت کنید، برای سه مجموعه دلخواه A, B, C از مجموعه مرجع U ، داریم:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$$

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= \{x \in U \mid \dots \vee x \in (B \cap C)\} && \text{تعریف اجتماع} \\ &= \{x \in U \mid x \in A \vee (x \in B \wedge \dots)\} && \text{تعریف اجتماع} \\ &= \{x \in U \mid (\dots \vee x \in B) \vee x \in C\} && \text{شرکت‌پذیری «\vee»} \\ &= \{x \in U \mid x \in (\dots) \vee x \in C\} && \text{تعریف اجتماع} \\ &= (A \cup B) \cap C && \text{تعریف اجتماع} \end{aligned}$$

۲ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری « \cup » نسبت به « \cap » را ثابت کنید.

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

یعنی ثابت کنید:

$$\begin{aligned} \forall x: [x \in [A \cup (B \cap C)]] \\ \Rightarrow [x \in A \vee (x \in \dots)] &&& \text{تعریف اجتماع} \\ \Rightarrow [x \in A \vee (x \in B \wedge x \in \dots)] &&& \text{تعریف اشتراک} \\ \Rightarrow [(x \in A \vee \dots) \wedge (\dots \vee x \in C)] &&& \text{توزیع‌پذیری «\vee» نسبت به «\wedge»} \\ \Rightarrow [x \in \dots \wedge x \in \dots] &&& \text{تعریف «\cup»} \\ \Rightarrow x \in [(A \cup B) \cap \dots] &&& \text{تعریف اشتراک} \\ \Rightarrow A \cup (B \cap C) \subseteq \dots \end{aligned}$$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $(A \cup B) \cap (B \cup C) \subseteq \dots$ بنابراین، دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است؛ یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنای فاکتورگیری از « $A \cup$ » است.)

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه و تعریف تساوی بین دو مجموعه، تساوی $(A \cup B)' = (A' \cap B')$ را اثبات کنید.
 (باید ثابت کنید، $(A \cup B)' \subseteq (A' \cap B')$ و $(A' \cap B)' \subseteq (A \cup B)$)

$$\forall x: [x \in (A \cup B)' \Rightarrow x \notin (A \cup B) \Rightarrow x \notin A \wedge x \notin B \\ \Rightarrow x \in A' \wedge x \in B' \Rightarrow x \in (A' \cap B)] \Rightarrow (A \cup B)' \subseteq (A' \cap B)$$

تمرین دکارتی - ص ۳۲

اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند، در این صورت:

الف) $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$

ب) $A \times B = B \times A \Rightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می کنیم:

فرض کنیم: $A \times \emptyset \neq \emptyset$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x, y) در باید وجود داشته باشد که در این صورت:

$$(x, y) \in A \times \emptyset \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \dots \wedge \underbrace{y \in \emptyset}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y \in \emptyset$ یک تناقض است (مجموعه \emptyset فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\emptyset \times A = \emptyset$.

اثبات ب) اگر $A = \emptyset$ یا $B = \emptyset$ که حکم اثبات می شود.

حال فرض کنیم: $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرض $A \times B = B \times A$ ، ثابت می کنیم $A = B$.

$$\forall x \in A, \forall y \in B \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x, y) \in A \times B \\ \xrightarrow{A \times B = B \times A} (x, y) \in \dots \xrightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x \in B \wedge \dots \Rightarrow \dots \wedge B \subseteq A \\ \Rightarrow A = B$$

تمرینات ۳۳ ص ۳۳

۱ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه های آن ۳۸۴ واحد کم می شود، مجموعه A چند زیرمجموعه دارد؟

۲ اگر $A = \{۲, x + ۲y, ۴\}$ و $B = \{۴, ۵, x - y\}$ و $A = B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۳ ثابت کنید برای مجموعه های A و B با مرجع U داریم: $A - B \subseteq A$.

۴ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ آن گاه:

الف) $A \cup C \subseteq B \cup C$ ب) $A \cap C \subseteq B \cap C$

۵ مجموعه های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید: اگر $A \subseteq B$ و $C \subseteq D$ آن گاه:

الف) $A \cap C \subseteq B \cap D$ ب) $A \cap C \subseteq B \cup D$

۶ الف) فرض کنید: $A \subseteq \emptyset$ ثابت کنید: $A = \emptyset$. ب) فرض کنید $U \subseteq A$ ثابت کنید: $A = U$.

۷ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:

الف) $B - A = B$ ب) $B \subseteq A'$

۱۰ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$

ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$

پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$

ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۱۱ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$

ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$

ج) $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$

۱۲ اگر $A = \{y+2, 5, z\}$ و $B = \{x+1, 4, -2\}$ در این صورت، با فرض $A \times B = B \times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.