

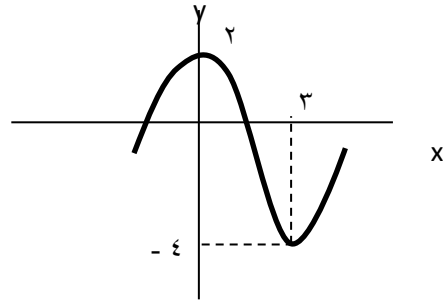
نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: دوازدهم تجربی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶/۴ تهران
 دبیرستان غیردولتی سرای دانش
 آزمون پایان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۳-۱۴۰۲

نام درس: ریاضی ۳
 نام دبیر: سرای دانش
 تاریخ امتحان: ۱۴۰۲/۱۰/۳
 ساعت امتحان: ۸:۰۰ صبح / عصر
 مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضا: مدیر		نمره به عدد:	نمره به حروف:
		نمره تجدید نظر به عدد:	نمره به حروف:
نام دبیر:		نام دبیر:	تاریخ و امضا:
		تاریخ و امضا:	تاریخ و امضا:
ردیف	سؤالات	نمره	حرف
۱/۲۵	اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد ، الف) دامنه تابع fog را با استفاده از تعریف به دست آورید. ب) ضابطه تابع fog را بنویسید.	۱	
۱	اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به صورت $D_f = [-2, 6]$ و $R_f = [3, 10]$ باشد ، دامنه و برد تابع $g(x) = 2f(x-4)$ را بیابید.	۲	
۱/۲۵	نمودار تابع مقابل را رسم کنید. $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9$	۳	
۱/۵	اگر تابع f روی R اکیدا نزولی و $f(-2) = 0$ باشد ، دامنه تابع زیر را بیابید. $g(x) = \sqrt{(x^2 - 8)f(x)}$	۴	
۱	ضابطه تابع $y = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ را با فرض $(g \circ f)(x) = \sqrt[3]{x}$ به دست آورید.	۵	
۱/۵	تابع $y = x^3$ را ابتدا نسبت به محور yها قرینه کرده ، سپس نمودار حاصل را دو واحد به چپ منتقل کرده و در نهایت آن را ۵ واحد به بالا منتقل می کنیم تا تابع f حاصل شود ، ضابطه تابع وارون تابع f را بیابید.	۶	
۱	معادله یک تابع سینوسی $y = a \sin(bx) + c$ را بنویسید که برد آن $[-4, 4]$ و دوره تناوب اصلی آن ۲ است.	۷	
۱/۵	معادله مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کرده و جوابهای کلی آن را بنویسید.	۸	
۱/۵	دوره تناوب ، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید. ۱) $f(x) = 4 \sin 5x$ ۲) $g(x) = -\frac{3}{2} \cos(\frac{1}{4}x)$	۹	
صفحه ی ۱ از ۲			

نمودار تابع $f(x) = a \cos bx + c$ به صورت زیر است ، ضابطه این تابع را بیابید.



۱/۵

۱۰

معادله مثلثاتی $\sin 2x = \sin x$ را حل کنید.

۱

۱۱

مقدار $\sin 15^\circ$ را بیابید.

۱

۱۲

حد توابع زیر را در صورت وجود مقایسه کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2 - \sqrt{x+1}}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{[x] - 3}{|2x - 1|}$

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x + 1}{6x^3 - 11x^2 - 3}$

۲/۵

۱۳

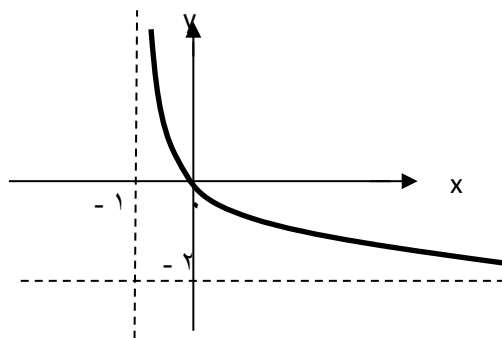
الف) حد توابع زیر را در صورت وجود بیابید.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{\sin x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) =$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$

ب) با استفاده از نمودار تابع $y = f(x)$ ، حدهای خواسته شده را بنویسید.



۱/۷۵

۱۴

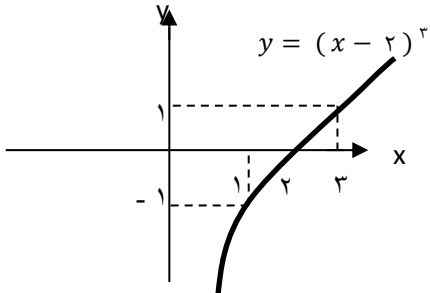
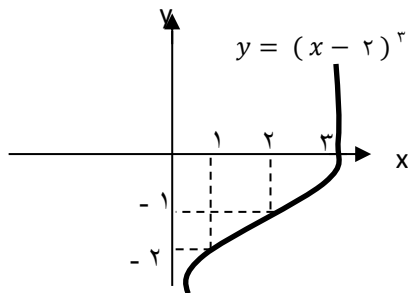
نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در یک همسایگی محذوف $2 -$ تعریف شده باشد. به طوری که

$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow (-7)^-} f(x) = -\infty$

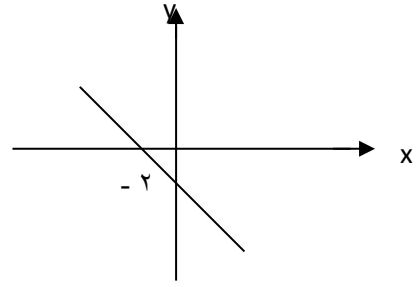
۰/۷۵

۱۵



ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	<p>متوسط نهایی ۱۴۰۰ (الف)</p> $f(x) = \sqrt{x-1} \rightarrow D_f : x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$ $g(x) = 2x^2 - 1 \rightarrow D_g = R$ $D_{f \circ g} : \{x \in D_g, g(x) \in D_f\} = \{x \in R, 2x^2 - 1 \geq 1\} = \{x \in R, 2x^2 \geq 2\} = \{x \in R, x^2 \geq 1\} = \{x \in R, x^2 \geq 1, x \leq -1\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ <p>ب)</p> $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2x^2 - 1 - 1} = \sqrt{2x^2 - 2}$	
۲	<p>متوسط نهایی ۱۴۰۰ $D_f = [-2, 6] \Rightarrow -2 \leq x \leq 6$</p> $g(x) = 2f(x-4) \Rightarrow -2 \leq x-4 \leq 6 \xrightarrow{+4} 2 \leq x \leq 10 \Rightarrow D_g = [2, 10]$ $R_f = [3, 10] \Rightarrow 3 \leq f(x) \leq 10$ <p>برد تابع های $y = f(x)$ و $y = f(x-4)$ یکسان است پس داریم:</p> $3 \leq f(x-4) \leq 10 \xrightarrow{\times 2} 6 \leq 2f(x-4) \leq 20 \Rightarrow 6 \leq g(x) \leq 20 \Rightarrow R_g = [6, 20]$	
۳	<p>با تشکیل اتحاد مکعب دو جمله ای یعنی $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ داریم:</p> $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 9 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 1 = (x-2)^3 - 1$ <p>برای رسم $y = (x-2)^3 - 1$ باید $y = x^3$ را دو واحد به راست و سپس یک واحد به پایین منتقل می کنیم.</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around;">   </div>	
۴	<p>متوسط نهایی ۱۴۰۰ $g(x) = \sqrt{(x^2 - 8f(x))} \Rightarrow (x^2 - 8f(x)) \geq 0$</p> <p>چون f روی R اکیدا نزولی و $f(-2) = 0$ است، داریم:</p> $\Rightarrow f(x) > 2 \Rightarrow f(x) > f(-2) \Rightarrow x < -2 \text{ تابع } f \text{ مثبت است.}$	

\Rightarrow نمودار f تقریباً به صورت مقابل است.
 $\Rightarrow f(x) < 2 \Rightarrow f(x) < f(-2x) \Rightarrow$ برای $x > -2$ تابع f منفی است.



$$x^2 - 81 = 0 \Rightarrow x = \pm 9$$

x	-9	-2	9
$x^2 - 81$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+$	$+$	$-$
$(x^2 - 81)f(x)$	$+$	0	$-$

$$\Rightarrow x < -9 \text{ یا } -2 \leq x \leq 9 \Rightarrow D_g = (-\infty, \dots)$$

ضابطه تابع $y = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$ مد نظر بوده و با فرض $\sqrt[3]{x}$ ضابطه $h(x) = (g \circ f)(x) = \sqrt[3]{x}$ ضابطه $y = h^{-1}(x)$ هدف مساله می باشد. برای دستیابی به معکوس $h(x)$ کافی است از رابطه $\sqrt[3]{x}$ ، $y =$ را بر حسب y بیابیم :

$$y = \sqrt[3]{x} \xrightarrow{\text{به توان ۳ می‌رسانیم}} y^3 = x \rightarrow y = h^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$$

$y = x^2$ قرینه نسبت به محور y ها $\rightarrow y = (-x)^2 = x^2$ واحد چپ $\rightarrow y = -(x+2)^2$ واحد بالا

$x \rightarrow -x$ $x \rightarrow x+2$

$\xrightarrow{\text{واحد بالا}} y = f(x) = -(x+2)^2 + 0 \Rightarrow (x+2)^2 = 0 - y$

$\Rightarrow x+2 = \sqrt[2]{0-y} \Rightarrow x+2 = -\sqrt[2]{y-0} \Rightarrow x = -2 - \sqrt[2]{y-0}$

$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = -2 - \sqrt[2]{x-0}$

$|b| = \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow b = \pm \pi$

$\rightarrow y = \pm \xi \sin(\pm \pi x)$

$|a| = \frac{\xi - (-\xi)}{2} = \xi \rightarrow a = \pm \xi$

$c = \frac{\xi + (-\xi)}{2} = 0$

الف) می‌دانیم که $\sin a \cos a = \frac{1}{2} \sin 2a$ است.

$\sin x \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{\xi} \rightarrow \frac{1}{2} \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{\xi} \rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\xi}{2}} = \sin \frac{\pi}{\xi}$

$\sin x = \sin a \rightarrow \begin{matrix} x = 2k\pi + a \\ x = 2k\pi + \pi - a \end{matrix}$

$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{\xi} \rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2\xi}$

$2x = 2k\pi + \frac{3\pi}{\xi} \rightarrow x = k\pi + \frac{3\pi}{2\xi}$

دوره تناوب توابع $y = a \cos bx$ و $y = a \sin bx$ برابر با $T = \frac{2\pi}{|b|}$ و ماکزیمم آن‌ها $|a|$ و مینیمم آن‌ها $-|a|$ است.

$$f(x) = 4 \sin \frac{1}{5} x \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{5}} = 10\pi, \max = 4, \min = -4$$

$$g(x) = -\frac{3}{2} \cos\left(\frac{1}{4} x\right) \rightarrow T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi, \max = \left|-\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}, \min = -\left|-\frac{3}{2}\right| = -\frac{3}{2}$$

$$\min = -\left|-\frac{3}{2}\right| = -\frac{3}{2}$$

۹

تفاضل طول نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی برابر با نصف دوره تناوب است.

$$\frac{T}{2} = 3 \Rightarrow T = 6 \Rightarrow \frac{2\pi}{|b|} = 6 \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{b>0} b = \frac{\pi}{3}$$

$$\left. \begin{array}{l} \max f = |a| + c = 2 \\ \min f = -|a| + c = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow 2c = -2 \Rightarrow c = -1 \rightarrow |a| = 3 \xrightarrow{a>0} a = 3$$

$$f(x) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{3} x\right) - 1$$

۱۰

$$2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi, K \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2x = \sin x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = 2k\pi + x \rightarrow x = 2k\pi, K \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2k\pi + \pi - x \rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3}, K \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$$

۱۱

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

۱۲

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2x+\sqrt{x+1})}{(2-\sqrt{x+1})(2+\sqrt{x+1})} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)(2x+\sqrt{x+1})}{-(x+3)} = -24$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{[x]-3}{|2x-1|} = \frac{-3}{0+3} = \infty$$

۱۳

پ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{6x^2} = \frac{1}{3}$

(الف)

آ) $\frac{-1}{0^-} = +\infty$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)}{(x+2)(x-1)(x+\sqrt{x})} = \frac{1}{6}$

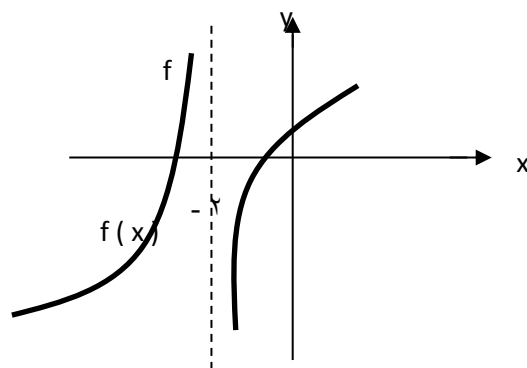
(ب)

آ) - 2

ب) $+\infty$

۱۴

برای مثال تابعی مانند f مطابق شکل روبه‌رو را در نظر بگیرید.



۱۵

چون همسایگی محذوف -2 تعریف شده است. پس تابع در نقطه $x = -2$ تعریف نشده است و داریم:

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = +\infty$$

امضاء:

نام و نام خانوادگی مصحح:

جمع بارم: ۲۰ شماره