

نام و نام خانوادگی: .....

مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی

نام پدر: .....

شماره داوطلب: .....

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران

دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین

امتحانات نیمسال اول سال تمصیلی ۱۴۰۴ - ۱۴۰۳

[www.sarayedanesh.com](http://www.sarayedanesh.com)

021-2936

نام درس: هندسه ۲

نام دبیر: خانم سهرابی

تاریخ امتحان: ۱۵/۱۰/۱۴۰۳

ساعت امتحان: ۳۰: ۸ صبح / عصر

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

محل مهر و امضاء مدیر	نمره به عدد:	نمره به حروف:
	نمره به عدد:	نمره به حروف:
نام دبیر:	تاریخ و امضاء:	نام دبیر:
سؤالات	نمره	نمره
۱	۱.۵	در دستگاه $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ است. $x + y$ را به دست آورید.
۲	۱.۵	اگر $A = [i^2 - j]_{2 \times 2}$ وارون ماتریس A را بیابید.
۳	۱.۵	اگر A ماتریس مربعی از مرتبه ۲ باشد و $ A  = 3$ حاصل $ 2A^{-1}  +  3A $ را بدست آورید.
۴	۲	اگر $A = \begin{bmatrix}  A  & 3 \\ 1 & 4 A  \end{bmatrix}$ مقدار $ A $ را بدست آورید.
۵	۱.۵	ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض اند. ماتریس $A \times B$ را بدست آورید و برقراری تساوی $ AB  =  A  B $ را بررسی کنید.
۶	۱	اگ $A = [1 \quad 2 \quad -3]$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در این صورت $ AB $ و $ BA $ را بدست آورید.
۷	۱.۵	اگر $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & x \\ x & 0 & 1 \end{vmatrix}$ باشد مقدار x را بدست آورید.
۸	۱	دایره های $x^2 + y^2 = 4$ و $x^2 + y^2 - 2x = 4$ نسبت به هم چه وضعی دارند؟
۹	۱	در نقطه A (2,3) روی دایره $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 3$ مماسی بر دایره رسم کرده ایم ، معادله این خط مماس را بدست آورید.
۱۰	۱	نقاط $A(-1, -1)$ و $B(1, 1)$ و $C(1, -3)$ رئوس مثلث ABC هستند معادله دایره محیطی ABC را بنویسید . سپس معادله مماس بر این دایره را در راس B بدست آورید.

۱۱	معادله دایره ای را بنویسید که مرکز آن $O(2,1)$ بوده و خط $3x + 4y = -5$ مماس باشد.
۱۲	معادله دایره ای بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطر هایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد.
۱۳	مقدار $m$ را چنان تعیین کنید که دایره به معادله $x^2 + y^2 + 2x - 2y + m = 0$ با دایره به مرکز $O(2, -3)$ و شعاع ۳ مماس بیرون باشد.
۱۴	وضعیت خط $x + y = 2$ و $x^2 + y^2 = 2$ را نسبت به هم مشخص کنید.
۱۵	اگر معادله $x^2 + y^2 + ax - 2y + 4 = 0$ نمایش یک نقطه باشد، $a$ را بیابید.
صفحه ی ۲ از ۲	

جمع بارم : ۲۰ نمره



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران  
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران  
دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین  
کلید سؤالات پایان کرم نوبت اول سال تمصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳



www.sarayedanesh.com

۰۲۱-۲۹۳۶

نام درس: هندسه دوازدهم

نام دبیر: .....

تاریخ امتحان: ۱۵ / ۱۰ / ۱۴۰۳

ساعت امتحان: ۸:۳۰ صبح / عصر

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

$$\begin{cases} ax + by = r \\ cx + dy = -1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ r & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix} \rightarrow x + y = 1 + r = r$$

$$A = [i^r - j]_{r \times r} = \begin{bmatrix} 1^r - 1 & 1^r - r \\ r^r - 1 & r^r - r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ r & r \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{r} \begin{bmatrix} r & 1 \\ -r & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r} \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|rA^{-1}| + |rA| = r^r |A^{-1}| + r^r |A| = r \left( \frac{1}{|A|} \right) + r |A| = \frac{r}{r} + r r = \frac{r^2}{r}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} |A| & r \\ 1 & r|A| \end{vmatrix} \rightarrow |A| = r|A|^r - r$$

$$\rightarrow r|A|^r - |A| - r = 0 \rightarrow \begin{cases} |A| = 1 \\ |A| = -\frac{r}{r} \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} r & -1 \\ r & r \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} r & 1 \\ r & r \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} r & -1 \\ r & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 1 \\ r & r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ r & 11 \end{bmatrix} \rightarrow |AB| = r r \quad (1)$$

$$\begin{aligned} |A| &= r - r = 0 \rightarrow |AB| = 11 \times r = r r \quad (r) \\ |B| &= r - r = 0 \end{aligned}$$

$$(1), (r) \rightarrow |AB| = |A| |B|$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & r & r \\ -1 & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r \\ -1 \\ -r \end{bmatrix} = [-r - r - r] = [-1r] \rightarrow |AB| = -1r$$

$$BA = \begin{bmatrix} -r \\ -1 \\ -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & r & -r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r & -r & r \\ -1 & -r & r \\ r & r & -r \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow |BA| = -r \begin{vmatrix} -r & r \\ r & -r \end{vmatrix} - (-r) \begin{vmatrix} -1 & r \\ r & -r \end{vmatrix} - r \begin{vmatrix} -1 & -r \\ r & r \end{vmatrix} = 0$$

$$0 - 1 \begin{vmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{vmatrix} + 0 = 0 \rightarrow -(1 - x^2) = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0$$

$$\rightarrow x^2 = 1 \rightarrow x = \pm 1$$

۷ - دترمینان را بر حسب سطر اول بسط می دهیم:

- ۸

$C: x^2 + y^2 = r$  ,  $C': x^2 + y^2 - rx = r$

$O(0,0)$  ,  $O'(1,0)$   $r = r$  ,  $r' = \sqrt{5}$

$OO' = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1 \Rightarrow |r - r'| = \sqrt{5} - r < OO' < r + r' = \sqrt{5} + r \Rightarrow$  دو دایره متقاطع می‌باشند.

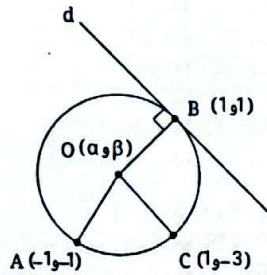
- ۹

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 5$

$O(1,1)$  ,  $A(r,r) \rightarrow m_{OA} = \frac{y_A - y_O}{x_A - x_O} = \frac{r-1}{r-1} = 1 \xrightarrow{\text{شیب خط مماس}} m' = -\frac{1}{r} \rightarrow y-r = -\frac{1}{r}(x-r)$

- ۱۰

فاصله هریک از نقاط  $A$  ,  $B$  و  $C$  تا مرکز برابر شعاع دایره است.



$OA = OB \rightarrow \sqrt{(-1-\alpha)^2 + (-1-\beta)^2} = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2}$

$\rightarrow (1+\alpha)^2 + (1+\beta)^2 = (1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2$

$\rightarrow 1 + r\alpha + \cancel{\alpha^2} + 1 + r\beta + \cancel{\beta^2} = 1 - r\alpha + \cancel{\alpha^2} + 1 - r\beta + \cancel{\beta^2}$

$\rightarrow r\alpha + r\beta = 0 \rightarrow \alpha + \beta = 0 \quad (1)$

$OB = OC \rightarrow \sqrt{(1-\alpha)^2 + (1-\beta)^2} = \sqrt{(1-\alpha)^2 + (-r-\beta)^2}$

$\rightarrow 1 + \cancel{\alpha^2} - r\alpha + 1 + \cancel{\beta^2} - r\beta = 1 + \cancel{\alpha^2} - r\alpha + 1 + \cancel{\beta^2} + r\beta$

$\rightarrow r\beta + r = 0 \rightarrow \beta = -1 \xrightarrow{(1)} \alpha = 1$

مختصات مرکز:  $O(1, -1)$  ,  $R = OB = \sqrt{(1-1)^2 + (1-(-1))^2} = r$

$\Rightarrow$  معادله دایره:  $(x-1)^2 + (y+1)^2 = r$

شیب خط مماس در نقطه  $B$  ( $m_d$ ) معکوس قرینه شیب  $BO$  می‌باشد.

$m_{BO} = \frac{-1-1}{1-1} = \infty$

بنابراین شیب خط مماس بر دایره در نقطه  $B$  صفر است. پس معادله خط مماس به صورت زیر می‌باشد:

معادله خط مماس:  $y = 1$

- ۱۱

$r = \frac{|r(r) + r(1) + 5|}{\sqrt{r^2 + r^2}} = \frac{15}{5} = r$

فاصله مرکز دایره تا خط مماس بر دایره، برابر با شعاع دایره است:

$(x-r)^2 + (y-1)^2 = r$

معادله دایره برابر است با:

- ۱۲

$\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=r \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=r \\ y=-1 \end{cases}$

$d: rx + ry + 5 = 0$  ,  $O(r, -1) \rightarrow r = \frac{|r(r) + r(-1) + 5|}{\sqrt{r^2 + r^2}} = \frac{15}{5} = r$

۹



مرکز دایره  $O(2, -1)$  و شعاع آن برابر  $r = 2$  است. معادله دایره برابر با  $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 4$  است. - ۱۳

$$O(r, -r), r = 2$$

$$O'(-1, 1), r' = \frac{1}{r} \sqrt{8 - 4m} = \sqrt{2 - m}$$

$$d = OO' = \sqrt{9 + 16} = 5, r + r' = d \Rightarrow 2 + \sqrt{2 - m} = 5 \Rightarrow \sqrt{2 - m} = 3 \Rightarrow 2 - m = 9 \Rightarrow m = -7$$

نگارشی دیگر:

$$O'(-1, 1), r' = \frac{1}{r} \sqrt{8 - 4m}$$

$$d = OO' = \sqrt{9 + 16} = 5, r + r' = d \Rightarrow 2 + \frac{1}{r} \sqrt{8 - 4m} = 5 \Rightarrow \sqrt{8 - 4m} = 6 \Rightarrow 8 - 4m = 36 \Rightarrow m = -7$$

- ۱۴

دایره:  $x^2 + y^2 = r \Rightarrow$  مرکز دایره:  $O(0, 0)$  شعاع دایره:  $r = \sqrt{r}$

$$\text{خط: } x + y - r = 0, O(0, 0) \Rightarrow d = \frac{|1(0) + 1(0) - r|}{\sqrt{1 + 1}} = \sqrt{r}$$

$\Rightarrow d = r = \sqrt{r} \Rightarrow$  خط بر دایره مماس است.

۱۵ - نکته: معادله  $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$  هنگامی نمایش یک نقطه است که:  $a^2 + b^2 = 4c$

پس:

$$a^2 + (-r)^2 = 4 \times r \Rightarrow a^2 + r = 16 \Rightarrow a^2 = 12 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$$