

نام و نام خانوادگی:

مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی

نام پدر:

شماره داوطلب:

تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران

اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران

اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران

دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین

امتحانات نیم سال اول سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۵

 www.sarayedaneh.com

۰۲۱-۲۹۳۶

نام درس: گسسته

نام دبیر: لیلا رستگاریان

تاریخ امتحان: ۱۴۰۴ / ۱۰ / ۲۶

ساعت امتحان: ۰۸:۳۰ صبح / عصر

مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

نمره به عدد:		نمره به حروف:	نمره به عدد:	نمره به حروف:
نام دبیر:		تاریخ و امضاء:	نام دبیر:	تاریخ و امضاء:
محل مهر و امضاء مدیر				
ردیف	سؤالات			بارم
۱	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. الف) معادله هم نهشتی $b \equiv^m ax$ دارای جواب است اگر و تنها اگر $(b, m) a$ ب) دو عدد $(n + ۲, n + ۳)$ نسبت به هم اول اند $(n \in \mathbb{Z})$ پ) گراف G که در آن $\delta(G) = 0$ است یک گراف ناهمبند است. ت) برای سه مجموعه C, B, A اگر $A \cup B = A \cup C$ باشد آن گاه $B = C$			۱
۲	اگر $n \in \mathbb{Z}$ و $a \equiv^m b$ باشند آن گاه ثابت کنید $a^n \equiv^m b^n$.			۱
۳	به روش بازگشتی ثابت کنید $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}; x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq xyz(x + y + z)$			۱/۵
۴	الف) اگر $a > 0$ ، ثابت کنید $a + \frac{1}{a} \geq ۲$ ب) اگر y, x دو عدد حقیقی هم علامت باشند، حداقل عبارت $(x + y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})$ چقدر است؟			۱/۷۵
۵	چند عدد صحیح a وجود دارد که $a ۴k + ۳$ و $a ۶k + ۳$ برقرار باشند؟			۱
۶	نشان دهید اگر $۷ ۲۷x + ۴۹$ آن گاه $۷ x$ برقرار است.			۱
۷	کدام معادله هم نهشتی دارای جواب است و کدام نیست؟ چرا؟ اگر معادله دارای جواب است، جواب های آن را به دست آورید؟ الف) $۶x \equiv ۱۱^8$ ب) $۵x \equiv ۱۱^8$			۱/۵
۸	ثابت کنید عدد $۱۶^{۹۰} - ۱۵^{۹۰} - ۳^{۹۰}$ بر ۲۴۰ بخش پذیر است؟			۱

۹	فرض کنیم $a \equiv^m b$ و $b \equiv^n c$ و $(m, n) = d$ ، در این صورت ثابت کنید $a \equiv^d c$ ؟	۱
۱۰	رقم یکان عدد $12^3 + 6 \times 13^{31}$ چند عدد است؟	۱
۱۱	اگر ۱۱ آذر یک سال روز دوشنبه باشد، سوم خرداد همان سال چند شنبه است؟	۱
۱۲	اگر $k \in \mathbb{Z}$ و $7 \mid 5k + 3$ ، ثابت کنید $49 \mid 25k^2 + 44k + 37$	۱
۱۳	معادله سیاله روبه رو را در صورت داشتن جواب حل کنید و جواب های طبیعی آن را به دست آورید: $38x + 22y = 1020$	۱/۵
۱۴	درجه رأس های گراف G از مرتبه ۴ برابر است با $a, 2, 3, 1$ این گراف را رسم کنید، مقدار a را به دست آورید. مکمل این گراف را رسم کنید. مجموع درجات رئوس گراف $\bar{G}$ را به دست آورید.	۱/۵
۱۵	اگر گراف k_p دارای ۱۵ یال باشد، p را به دست آورید؟ گراف $\bar{k}_p$ را رسم کنید.	۱
۱۶	با توجه به گراف به رو به رو به سؤالات زیر پاسخ دهید. (الف) گراف همبند است یا ناهمبند؟ (ب) گراف منتظم است یا نامنتظم؟ (پ) دورها و مسیرهایی به طول های ۵ و ۴ و ۳ در این گراف در صورت وجود بنویسید. (ت) $N_G(a)$ و $N_G[a]$ را بنویسید.	۱/۵
۱۷	۲۷ نفر در یک کلاس هستند که ۲۰ نفر آنها هر کدام دقیقاً با ۳ نفر دوست هستند. نشان دهید بقیه افراد نمی توانند هر کدام دقیقاً با ۳ نفر دوست باشند.	۰/۷۵
موفق باشید		

جمع بارم : ۲۰ نمره



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیر دولتی دخترانه سرای دانش واحد فلسطین
کلید سؤالات نیم سال اول سال تمصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴

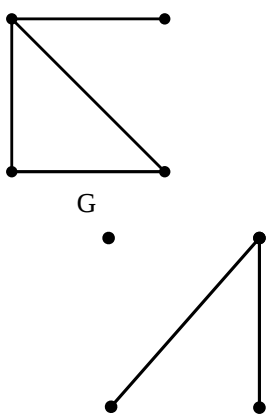
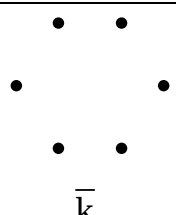


www.sarayedanesh.com

نام درس: گسسته
نام دبیر: لیلا رستگاریان
تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۱۰/۲۶
ساعت امتحان: ۸:۳۰ صبح / عصر
مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
۱	الف) نادرست ب) درست پ) درست ت) نادرست	
۲	با توجه به اتحاد $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})$ داریم: $a \equiv b \Rightarrow m a - b \Rightarrow m (a - b) \underbrace{(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1})}_c$ $\Rightarrow m a^n - b^n \Rightarrow a^n \equiv b^n$	
۳	$\forall x, y, z, \in \mathbb{Q}, x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2 \geq xyz(x + y + z)$ طرفین عبارت را در دو ضرب کرده، داریم: $\Leftrightarrow 2x^2y^2 + 2y^2z^2 + 2x^2z^2 - 2x^2yz - 2xy^2z - 2yz^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow \underbrace{x^2y^2 - 2xy^2z + y^2z^2}_{(xy-yz)^2} + \underbrace{x^2y^2 - 2x^2yz + x^2z^2}_{(xy-xz)^2} + \underbrace{y^2z^2 - 2xyz^2 + x^2z^2}_{(yz-xz)^2} \geq 0$ این عبارت همواره برقرار است.	
۴	الف) $a + \frac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow a^2 + 1 \geq 2a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$ این عبارت همواره برقرار است ب) $(x+y)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 + \frac{y}{x} + \frac{x}{y} + 1 = 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$ با توجه به قسمت (الف) $\frac{y}{x}, \frac{x}{y}$ دو عبارت معکوس یکدیگرند مانند $a, \frac{1}{a}$ پس مجموع آنها بزرگتر مساوی ۲ است. $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \Rightarrow 2 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 4$ پس حداقل این عبارت ۴ است.	
۵	تفاضل سمت راست $a 6k + 3 \Rightarrow a 24k + 12 \Rightarrow a 6$ $a 4k + 3 \Rightarrow a 24k + 18$ پس a برابر است با $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ پس ۸ مقدار برای a وجود دارد.	

۶	می دانیم $7 \mid 28x + 49$ تفاضل سمت راست $\left. \begin{matrix} 7 \mid 27x + 49 \\ 7 \mid 28x + 49 \end{matrix} \right\} \Rightarrow 7 \mid x$
۷	الف) $11 \nmid (6, 8)$ پس معادله جواب ندارد. ب) $11 \mid (5, 8)$ پس معادله جواب دارد. $\overset{\wedge}{5x} \equiv 11 \Rightarrow \overset{\wedge}{5x} \equiv 11 + 24 \Rightarrow \overset{\wedge}{5x} \equiv 35 \Rightarrow \hat{x} \equiv 7 \Rightarrow x = \wedge k + 7$
۸	با توجه به اتحاد $(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \dots + b^n$ داریم: $(a+b)^n = a^n + b^n + ab \underbrace{\left[\binom{n}{1} a^{n-2} + \binom{n}{2} a^{n-3}b + \dots + \binom{n}{n-1} b^{n-2} \right]}_k$ $\Rightarrow (a+b)^n - a^n - b^n = ab(k)$ $\Rightarrow (a+b)^n \overset{ab}{\equiv} a^n + b^n$ اگر $n=90, b=16, a=15$ باشد با جایگذاری در این عبارت داریم: $(15+16)^{90} \overset{15 \times 16}{\equiv} 15^{90} + 16^{90} \Rightarrow 240 \mid 31^{90} - 15^{90} - 16^{90}$
۹	$\begin{cases} (m, n) = d \Rightarrow d \mid m \\ a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m \mid a - b \end{cases} \Rightarrow d \mid a - b$ جمع سمت راست $\Rightarrow d \mid a - c \Rightarrow a \overset{d}{\equiv} c$ $\begin{cases} (m, n) = d \Rightarrow d \mid n \\ b \overset{m}{\equiv} c \Rightarrow n \mid b - c \end{cases} \Rightarrow d \mid b - c$
۱۰	$13^{31} \times 6 + 12^3 \overset{10}{\equiv} ?$ $(13^2)^{15} \times 13 \times 6 + 12^2 \times 12 \overset{10}{\equiv} (169)^{15} \times 13 \times 6 + 12^2 \times 12$ $\overset{78}{\Rightarrow} \begin{cases} 169 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow (169)^{15} \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow (169)^{15} \times 78 \overset{10}{\equiv} -1 \times 78 \overset{10}{\equiv} -78 + 80 \overset{10}{\equiv} 2 \\ 12^2 \times 12 \overset{10}{\equiv} 2^2 \times 12 \overset{10}{\equiv} 48 \overset{10}{\equiv} 8 \end{cases}$ جمع طرفین $\begin{cases} 13^{31} \times 6 \overset{10}{\equiv} 2 \\ 12^3 \overset{10}{\equiv} 8 \end{cases} \Rightarrow 13^{31} \times 6 + 12^3 \overset{10}{\equiv} 2 + 8 \overset{10}{\equiv} 0$
۱۱	برای رسیدن از آذر به خرداد همان سال باید به عقب برگردیم. $-11 - 2 \times 30 - 3 \times 31 - 28 \overset{7}{\equiv} -192 \overset{7}{\equiv} -3$ پس از روز دوشنبه سه روز به عقب برمی گردیم و به جمعه می رسیم. پس سوم خرداد جمعه بوده است.
۱۲	تفاضل $7 \mid 5k + 3 \overset{\times 7}{\Rightarrow} 49 \mid 35k + 21$ $\Rightarrow 49 \mid 25k^2 - 5k - 12$

توان ۲ $7 \mid 5k + 3 \Rightarrow 49 \mid 25k^2 + 30k + 9$ از طرفی می دانیم $49 \mid 49k + 49$ با جمع سمت راست تساوی داریم $49 \mid 25k^2 + 44k + 37$	
شرط جواب $1020 \mid (38, 22)$ که برقرار است. همه عبارت را به ۲ تقسیم می کنیم. $19x + 11y = 510 \Rightarrow 19x \equiv 510 \Rightarrow 19x + 11x \equiv 510$ $\Rightarrow 30x \equiv 510 \Rightarrow x \equiv 17 \Rightarrow x \equiv 6 \Rightarrow x = 11k + 6$ با جایگذاری در معادله داریم: $19(11k + 6) + 11y = 510 \Rightarrow y = -19k + 36$ $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 36 \end{cases} \quad k = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 17 \\ y = 17 \end{cases}$	۱۳
$a = 2$ (a نمی تواند ۱ یا ۳ باشد زیرا تعداد درجات با رأس فرد باید عددی زوج باشد) و چون مرتبه گراف ۴ است و رأسی از درجه ۳ داریم پس رأس تنها نداریم. و a نمی تواند صفر باشد.  $\sum \deg(\bar{G}) = 2 + 1 + 1 = 4$ $\bar{G}$ مکمل گراف	۱۴
$k_p = \frac{p(p-1)}{2} = 15 \Rightarrow p = 6$  $\bar{K}_6$	۱۵
الف) ناهمبند ب) گراف ۲-منتظم پ) دور به طول ۴: bdfhb, acega مسیر به طول ۳: aceg, bdfh ت) $N_G[a] = \{a, c, g\}, N_G(a) = \{c, g\}$ دور به طول ۵ و ۳ ندارد مسیر به طول بیشتر از ۳ ندارد	۱۶
افراد باقیمانده ۷ نفر هستند و چون در یک گراف تعداد رئوس با درجه فرد نمی تواند عددی فرد باشد پس امکان ندارد.	۱۷
نام و نام خانوادگی مصحح : امضاء:	جمع بارم : ۲۰ نمره

