

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: دوازدهم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه: سؤال: ۲ صفحه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحدحافظ
 امتحانات میان ترم نیمسال اول سال تمصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴
 www.sarayedanesh.com
 021-2936


نام درس: گسسته
 نام دبیر: آقای احمدی
 تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۰۹/۰۱
 ساعت امتحان: ۰۰:۰۸: صبح / عصر
 مدت امتحان: ۶۰ دقیقه

نمره به عدد:		نمره به حروف:		نمره تجدید نظر به عدد:		نمره به حروف:	
نام دبیر:		تاریخ و امضاء:		نام دبیر:		تاریخ و امضاء:	
سؤالات		شماره					
۱		ثابت کنید مربع هر عدد صحیح فرد به صورت $8q+1$ می باشد.					
۲		فرض کنید b عددی گویا و $\sqrt{5}$ عدی گنگ باشد با استدلال برهان خلف ثابت کنید $b - \sqrt{5}$ عددی گنگ است.					
۳		به روش بازگشتی ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y$					
۴		اگر عدد طبیعی $a > 1$ در دو شرط $a 9k + 4$ و $a 5k + 3$ ثابت کنید a عددی اول است.					

۵	اگر a عددی صحیح و فرد باشد و $b a + 2$ در اینصورت باقیمانده تقسیم عدد $a^2 + b^2 + 3$ را بر عدد ۸ بیابید.	۱,۲۵
۶	ثابت کنید هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت بهم اول هستند.	۱
۷	باقیمانده تقسیم عدد 7^{30} بر ۱۵ را بیابید.	۱,۲۵
۸	الف: باقیمانده تقسیم عدد ۲۷۱۳۹۱ را بر ۹ بدون انجام عمل تقسیم بدست آورید. (۰,۷۵) ب: باقیمانده تقسیم 10^{20} را بر ۱۱ بیابید. (۰,۵)	۱,۲۵
۹	اگر ۱۴ اردیبهشت دوشنبه باشد، ۱۷ آذر چند شنبه است؟	۱,۲۵
۱۰	با تبدیل معادله سیاله خطی $5x + 2y = 18$ به معادله همنهشتی و حل آن، جواب عمومی معادله را بدست آورید.	۱,۵



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
کلید سؤالات میان ترم نوبت اول سال تحصیلی ۱۴۰۵-۱۴۰۴



www.sarayedanesh.com

نام درس: گسسته دوازدهم

نام دبیر: امدی

تاریخ امتحان: ۱۴۰۴/۰۹/۰۱

ساعت امتحان: صبح / عصر

مدت امتحان: دقیقه

محل مهر یا امضاء مدیر

راهنمای تصحیح

ردیف

$$\text{عدد فرد} = x = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = \underbrace{4k(k+1)}_{2q} + 1 = 4(2q) + 1 = 8q + 1$$

ضرب دو عدد متوالی $k(k+1)$ عددی زوج مانند $2q$ است.

۱

اثبات: فرض کنیم $\sqrt{a}-b$ بی‌کسری نباشد (قرن خلف) پس گویا است:

$$\sqrt{a}-b = \frac{p}{q} \Rightarrow \sqrt{a} = \frac{p}{q} + b \Rightarrow \text{گویا} = \text{بی‌کسری}$$

و این تناقض است پس حکم اولیه درست است.

۲

$$x^2 + y^2 + 1 \geq xy + x + y \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2 \geq 2xy + 2x + 2y \Leftrightarrow$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) + (x^2 - 2xy + y^2) \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-y)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0, (y-1)^2 \geq 0, (x-y)^2 \geq 0 \quad \text{صورت درستی است}$$

طبق اثبات بازگشتی حکم برقرار است.

۳

$$a \mid 9k+4 \Rightarrow a \mid 5(9k+4) \Rightarrow a \mid 45k+20 \quad (1)$$

$$a \mid dk+3 \Rightarrow a \mid 9(dk+3) \Rightarrow a \mid 9dk+27 \quad (2)$$

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow a \mid (9dk+27) - (45k+20) \Rightarrow a \mid 7 \xrightarrow{a \mid 7} \underline{a=7}$$

۴

حل: a عددی فرد است بنابراین $a+2$ عددی فرد است و $b \mid a+2$ بنابراین
با نینر عددی فرد خواهد بود می دانیم مربع هر عدد فرد مضرب از ۸ به
علاوه یک است پس:

$$\left. \begin{array}{l} a \text{ فرد} \Rightarrow a^2 = 8m+1 \\ b \text{ فرد} \Rightarrow b^2 = 8n+1 \end{array} \right\} \Rightarrow a^2 + b^2 + 3 = (8m+1) + (8n+1) + 3 = 8(m+n) + 5$$

$$\Rightarrow r=5$$

۵

$$(m, m+1) = d \Rightarrow \begin{cases} d \mid m \\ d \mid m+1 \end{cases} \Rightarrow d \mid (m+1) - m \Rightarrow d \mid 1 \xRightarrow{d > 0} d = 1$$

۶

$$\begin{aligned} 49 \equiv 4 \pmod{15} &\Rightarrow 7^2 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow (7^2)^2 \equiv 4^2 \pmod{15} \Rightarrow 7^4 \equiv 16 \equiv 1 \pmod{15} \Rightarrow (7^4)^2 \equiv 1^2 \pmod{15} \\ &\Rightarrow 7^8 \equiv 1 \pmod{15} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} 7^2 &\equiv 4 \pmod{15} \\ 7^4 &\equiv 1 \pmod{15} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 7^2 \times 7^2 \equiv 1 \times 4 \pmod{15} \Rightarrow 7^4 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow \boxed{r = 4}$$

از عرض

۷

الف:

$$271391 \equiv 2+7+1+3+9+1 = 23 \equiv 2 \pmod{9} \Rightarrow \boxed{r = 2}$$

۸

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{10} & (n \text{ زوج باشد}) \\ n \equiv -1 \pmod{10} & (n \text{ فرد باشد}) \end{cases}$$

ب:

حل: ۱۴ اردیبهشت را متناظر صفر می‌گیریم و بقیه را طبق جدول زیر جلو

دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنج‌شنبه	جمعه	شنبه	یکشنبه
۵	۱	۲	۳	۴	۵	۶

می‌رویم (همیشه‌ی به پیچانه ۷)

$$\begin{aligned} 2 \times 30 &= \text{روزهای مهر و آبان} \\ 17 &= \text{روز در آذر} \end{aligned}$$

۹

$$\begin{aligned} \text{روزهای باقی‌مانده اردیبهشت} &= 31 - 14 = 17 \\ \text{روزهای خرداد، تیر، مرداد و شهریور} &= 4 \times 31 \end{aligned}$$

$$dx + 2y = 18 \Rightarrow 2y \equiv 18 \pmod{15} \xrightarrow{\div 2} y \equiv 9 \equiv 4 \pmod{15} \Rightarrow 15 \mid y - 4$$

$$\Rightarrow y - 4 = dk \Rightarrow \boxed{y = dk + 4}$$

$$dx + 2(dk + 4) = 18 \Rightarrow dx + 10k - 10 = 0 \Rightarrow dx = -10k + 10 \xrightarrow{\div 5} \boxed{x = -2k + 2}$$

10