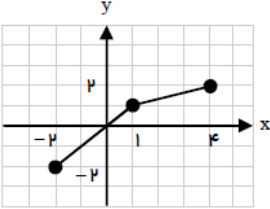


نام درس: حسابان (۲) دوازدهم
 نام دبیر: آقای امیر قربانی
 تاریخ امتحان: ۱۱ / ۱۰ / ۱۴۰۰
 ساعت امتحان: ۳۰ : ۱۰ صبح
 مدت امتحان: ۷۰ دقیقه

جمهوری اسلامی ایران
 اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
 اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
 دبیرستان غیردولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
 آزمون میان ترم اول سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

نام و نام خانوادگی:
 مقطع و رشته: متوسطه دوم ریاضی
 نام پدر:
 شماره داوطلب:
 تعداد صفحه سؤال: ۲ صفحه

ردیف	سؤالات	نمره
۴	معادلات زیر را حل کنید. $\sin 2x + \cos x = 0$ $\cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}$ $2 \sin(3\pi x) = \sqrt{3}$ $4 \cos 2x - 8 \cos x + 4 = 0$	۱
۱,۵	اگر چند جمله ای $f(x) = x^2 + ax - 3$ بر $(x + 1)$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $f(x)$ بر $(x - 2)$ را به دست آورید.	۲
۲	باقی مانده تقسیم $f(x) = x^3 + x^2 - 6$ بر $x + 2$ را بیابید.	۳
۳	دوره تناوب، ماکزیمم و مینیمم توابع زیر را بیابید. $f(x) = 5 \sin(6x) - 7$ $g(x) = \frac{1}{2} \cos(3x) + 4$	۴
۲	دو تابع $f = \{(2, 5), (6, 3), (3, 7), (4, 1), (1, 9)\}$ و $g(x) = \frac{x}{x-1}$ مفروض اند. اگر $f^{-1}(g(2a)) = 6$ باشد، a کدام است؟	۵
۲	ضابطه ی معکوس تابع $y = 2 - \sqrt{x-1}$ به کدام صورت است؟	۶

۲	<p>اگر $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}}$ و $g(x) = \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}}$ باشند، دامنه تابع $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ کدام است؟</p>	۷
۲	<p>نمودار تابع های زیر را رسم کنید.</p> <p>الف) $y = -x^3 + 1$ ب) $y = -(x+1)^3 - 1$</p>	۸
۱,۵	<p>با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است، نمودار تابع $g(x) = f(2x) - 1$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.</p> 	۹



اداره ی کل آموزش و پرورش شهر تهران
اداره ی آموزش و پرورش شهر تهران منطقه ۶ تهران
دبیرستان غیر دولتی پسرانه سرای دانش واحد حافظ
کلید سؤالات میان ترم اول سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰

نام درس: مسابان (۲) دوازدهم
نام دبیر: آقای امیرقربانی
تاریخ امتحان: ۱۱ / ۱۰ / ۱۴۰۰
ساعت امتحان: ۱۰:۳۰ صبح
مدت امتحان: ۷۰ دقیقه

ردیف	راهنمای تصحیح	محل مهر یا امضاء مدیر
	<p>الف) $\sin 2x + \cos x = 0$</p> <p>پاسخ: می‌دانیم: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ بنابراین:</p> $\sin 2x + \cos x = 0 \Rightarrow 2 \sin x \cos x + \cos x = 0$ $\Rightarrow \cos x (2 \sin x + 1) = 0$ $\begin{cases} 1) \cos x = 0 = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2) 2 \sin x + 1 = 0 \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} = \sin(-\frac{\pi}{6}) \Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi + \pi - (-\frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{7\pi}{6} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \end{cases}$	
۱	<p>ب) $\cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}$ $\cos^2(x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{1}{2}$ $\Rightarrow \cos(x + \frac{\pi}{2}) = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$</p> <p>۱) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = +\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi - \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi - \frac{3\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$</p> <p>۲) $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{3\pi}{4}) \Rightarrow x + \frac{\pi}{2} = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow x = \begin{cases} 2k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ 2k\pi - \frac{5\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$</p>	
	<p>ب) $2 \sin(3\pi x) = \sqrt{3}$</p> <p>پاسخ: با تقسیم طرفین معادله بر ۲ داریم:</p> $\sin(3\pi x) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(\frac{\pi}{3})$ $\Rightarrow 3\pi x = \begin{cases} \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{3} \\ \frac{2k\pi}{3} + \pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \Rightarrow x = \begin{cases} \frac{2k}{3} + \frac{1}{9} \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \frac{2k}{3} + \frac{2}{9} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$	
۲	<p>ت) $4 \cos 2x - 8 \cos x + 4 = 0$</p> <p>پاسخ: معادله داده شده را به معادله‌ای درجه ۲ تبدیل می‌کنیم به کمک رابطه $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ بنابراین:</p> $4 \cos 2x - 8 \cos x + 4 = 0 \Rightarrow 4(\cos 2x + 1) - 8 \cos x = 0$ $4(2\cos^2 x) - 8 \cos x = 0 \Rightarrow 8\cos^2 x - 8 \cos x = 0$ $\Rightarrow \cos^2 x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x (\cos x - 1) = 0$ <p>پاسخ: چون $f(x)$ بر $(x+1)$ بخش پذیر است پس باقی مانده تقسیم صفر است.</p> $f(-1) = 0 \Rightarrow 1 - a - 3 = 0 \Rightarrow a = -2$ $f(2) = 4 - 4 - 3 = -3$	
۳	<p>پاسخ: باید ریشه مقسوم علیه را در مقسوم قرار دهیم.</p> $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow r = f(-2) = (-2)^2 + (-2)^2 - 6$ $\Rightarrow f(-2) = -8 + 4 - 6 = -10 \Rightarrow \text{باقی مانده} = -10$	

الف

$$f(x) = 5 \sin(6x) - 7$$

پاسخ: در توابعی به فرم $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

$$f(x) = 5 \sin(6x) - 7 \rightarrow T = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$\max f = |5| - 7 = -2, \quad \min f = -|5| - 7 = -12$$

۴

ب

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos(3x) + 4$$

در توابعی به فرم $y = a \cos bx + c$ و $y = a \sin bx + c$ داریم:

$$T = \frac{2\pi}{|b|}, \quad \max = |a| + c, \quad \min = -|a| + c$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \cos(3x) + 4 \rightarrow T = \frac{2\pi}{3}$$

می‌دانیم اگر $f(a) = b$ باشد آن‌گاه $f^{-1}(b) = a$ است.

۵

$$f^{-1}(g(2a)) = 6 \rightarrow f(6) = g(2a) \rightarrow 3 = \frac{2a}{2a-1} \rightarrow 6a - 3 = 2a \rightarrow 4a = 3 \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x+4}} \rightarrow D_f: x+4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$g(x) = \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}} \rightarrow D_g: x+4 > 0 \rightarrow x > -4$$

$$D_f \cap D_g = \{x | g(x) = 0\} = (x > -4) \cap (x > -4) - \{x | \frac{x^2-25}{\sqrt{x+4}} = 0\}$$

$$= x > -4 - \{x = \pm 5\} = (-4, +\infty) - \{5\}$$

۶

ابتدا x را بر حسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

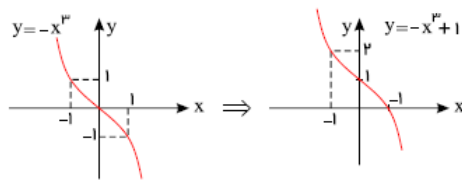
۷

$$y = 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (2-y)^2 \Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2$$

$$\Rightarrow x = y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \leq 2$$

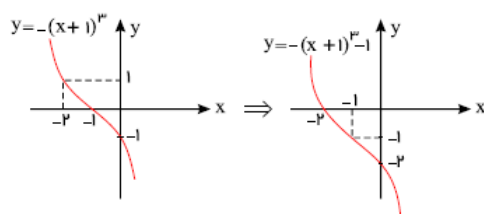
چون $\sqrt{x-1}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x-1}$ منفی بوده و $y = 2 - \sqrt{x-1}$ همواره کوچک‌تر مساوی ۲ می‌شود. بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \leq 2$ است.

الف) برای رسم $y = -x^2 + 1$ باید $y = -x^2$ را یک واحد به بالا منتقل کنیم.



۸

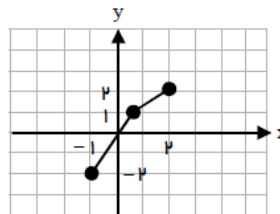
ب) برای رسم $y = -(x+1)^2 - 1$ باید $y = -x^2$ را ابتدا یک واحد به چپ منتقل کرده و سپس آن را یک واحد به پایین منتقل کنیم.



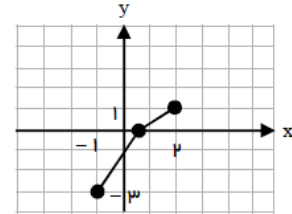
پاسخ: با توجه به نمودار دامنه و برد برابر است با:

دامنه: $D_g = [-1, 2]$

برد: $R_g = [-3, 1]$



$f(2x)$



$f(2x) - 1$

۹

